Osaka University Knowledge Archive

Title	Polygenic function ノ rectilinear derivativeニツイテ
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 127 p.167-p.174
Issue Date	1937-04-19
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74493
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

568. Polygenic function ノ rectilinear derivative ニツイテ

井上　正雄（阪大）

Polygenic function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ ノ rectilinear n-th derivative ヲ

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}$$

トスレバ

$$\frac{d^n f}{dz^n_\theta}=(\bar{\mathcal{D}}+\mathcal{D}e^{-2i\theta})^n f(z)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\bar{\mathcal{D}}^r\mathcal{D}^{n-r}(f(z))e^{-2(n-r)i\theta}$$

但シ　$\mathcal{D}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right]$,　$\bar{\mathcal{D}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right]$

依ツテ今　$\binom{n}{r}\bar{\mathcal{D}}^r\mathcal{D}^{n-r}=g_{n-r}$ トスレバ

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}=\sum_{r=0}^{n}g_r(z)e^{-2ri\theta}$$

即チ　$\dfrac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}$

ハーツノ centerfunction g_0 ト n 個ノ phasefunction

$g_r\,(r=1,2,\text{------},n)$ ト二依ツテ合成サレル。以後コノ関係ヲ

$$D^n f=\frac{d^n f}{dz^n}=\gamma_n(g_0,g_1,\text{--------},g_n)$$

デ表ハス。[1]

或ハ

$$\left(\frac{n-r}{n}g_r+\frac{r+1}{n}g_{r+1}e^{-2i\theta}\right)=\gamma\left(\frac{n-r}{n}g_r,\frac{r+1}{n}g_{r+1}\right)=\Gamma_{r+1}$$

トスレバ

$$\frac{d^n f}{dz_\theta^n}=\sum_{r=1}^{n}\Gamma_r e^{-2(r-1)i\theta}$$

トナル。

即チ n 個ノ fundamental (-circular) function Γ_r $(r=1,\text{-----},n)$ ニ依ツテモ決定サレルカラ コノ関係ヲ

$$D^n f=\frac{d^n f}{dz^n}=\sigma_n(\Gamma_1,\Gamma_2,\text{-------},\Gamma_n)$$

デ表ハス。

特ニ $n=1$ ナルトキハ $\frac{df}{dz_\theta}=g_0+g_1e^{-2i\theta}$ トナルカラ Df ニヨリ point-circle ノ對應——所謂 Kasner ノ clockmotion ——ガ得ラレ，θ ガ $0\longrightarrow 2\pi$ ト移動スレバ $\frac{df}{dz_\theta}$ ハ逆ノ方向ニ２倍ノ速度デ g_0 ヲ中心トシ $|g_1|$ ヲ半徑トスル円ヲ二周スル。

$n=2$ ノトキハ

---

(1) $n=1$ ノトキハ之レヲ省略スル、又 $D^0f=f$ トシテオク。

$$\frac{d^2 f}{d z_\theta^2} = g_0 + g_1 e^{-2i\theta} + g_2 e^{-4i\theta}$$

トナルカラ

$$\frac{d^2 f}{d z_\theta^2}$$

ハ $(g_0 + g_2 e^{-4i\theta})$ ヲ basiscircle トシ $|g_1|$ ヲ determining-length トスル limaçon ヲ画ク。[2]

依ッテ

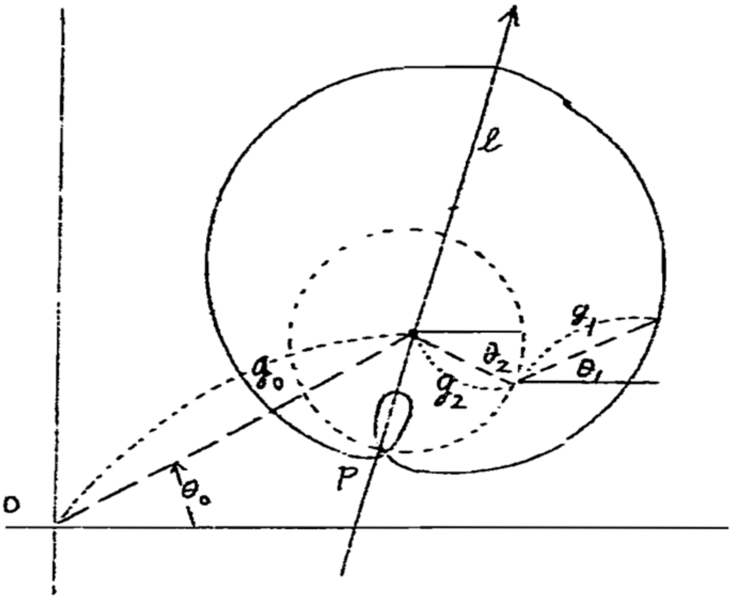
$$g_j = r_j e^{i\theta_j},$$

$$|\theta_j| \leqq \pi \ (j=0,1,2)$$

トスレバ，コノ limaçon ノ normal form ハ

$$\rho = r_1 + 2 r_2 \cos \Theta$$

トナル。



尚又 Pole ハ $p(r^*, \theta^*) = r_0 e^{i\theta_0} + r_2 e^{i(2\theta_1 - \theta_2 + \pi)}$，initial line. P ヲ通ッテ argrment ガ $\omega = 2\theta_1 - \theta_2$ ナル半直線トナル。〔Symmetric axis l ノ方程式ハ $r \sin(\omega - \theta) = r^* \sin(\omega - \theta^*)$ デアル〕

カクテ上述ノ Θ ハ

$\Theta = 2(\omega - \theta)$ ヲ満足スルコトガワカル。

---

(2) E. Kasner: The second derivative of a Poly. fu. Trans. A. M. S. 30 (1928)

以上ヨリ, $D^2 f$ ニヨリ, 一般ニハ[3] point-limaçon ノ對應ガ得ラレ, θ ガ $0 \longrightarrow 2\pi$ ト動ケバ $\dfrac{d^2 f}{dz^2_\theta}$ ハ p ヲ中心トシテ測ッタ2倍ノ角速度デコノ limaçon ヲ逆方向ニ二周スル。

$n \geq 3$ ノトキモ矢張リ, $D^n f$ ニヨリ、更ニ複雑ナル point-element ノ對應ガ得ラレル。

次ニカヽル $D^n f$ ニヨル point-element ノ對應ノ characterization ノ問題ヲ考ヘル: 即チ先ヅカヽル point-element ノ對應ヲ支ヘタトキコレヲ $\dfrac{d^n f}{dz^n_\theta}$ トシテモツ polygenic function f ノ存在スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ヲ求メル。

之レニ關シテ次ノ定理ガ成立スル。コレハ Kasner ノ論文[4]ニヲケル結果ノ一ツノ拡張デアル。

定理.

$g_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ヲ Polygenic function トスルトキ

$$D^n f(z) = \gamma_n(g_0, g_1, \cdots\cdots, g_n)$$

$$D^r f(z_0) = \gamma_r(a_{r0}, a_{r1}, \cdots\cdots, a_{rr})$$

$$(r = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$$

---

(3) "一般ニハ" ト云ッタノハ limaçon ガ degenerate シテ圓或円トナリ速度ノ関係ガ保タレナイ場合ガアルカラデアル。

(4) E. Kasner: A complete charact. of the deriv. of a poly. fn.

Proc. Nat. Acad. Sci. v. 22, 1936

ヲ満足スル Polygenic function $f(z)$ ガ存在スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$(n-r)\mathcal{D}(g_r)=(r+1)\overline{\mathcal{D}}(g_{r+1})$$

$$(r=0,1,\cdots\cdots,n-1)$$

ガ成立スルコトデアル。尚コノトキ $f(z)$ ハ z_0 ノ近傍デ一意的ニ定ル。

但シ a_{rs} $(r,s=0,1,\cdots\cdots,n-1\ ;\ r\geqq s)$ ハ任意ノ有限ナル実数又ハ複素数トス。

(証) 帰納法ニヨッテ証明スル。以下スベテ局部的ニ考察スル。

$n=1$ ノトキ[4]

必要ナルコト　$f=u+iv,\ g_r=\varphi_r+i\psi_r\ (r=0,1)$

トスルトキ

$$\frac{df}{dz_\theta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}e^{-2i\theta}$$

$$=(\varphi_0+i\psi_0)+(\varphi_1+i\psi_1)e^{-2i\theta}$$

トナルカラ、コレヨリ簡単ナル計算ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1-\psi_0)&=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0+\varphi_1)\\ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0-\varphi_1)&=\frac{\partial}{\partial y}(\psi_0+\psi_1)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル。

之レヨリ直チニ　$\mathcal{D}(g_0)=\overline{\mathcal{D}}(g_1)$

充分ナルコト

$$\mathfrak{D}(g_0)=\bar{\mathfrak{D}}(g_1)$$

ヨリ (1) ガ出ルカラ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}u=\varphi_0+\varphi_1,\quad \frac{\partial}{\partial y}u=\psi_1-\psi_0,\quad u(x_0,y_0)=\mathcal{R}(a_{00})\\&\frac{\partial}{\partial x}v=\psi_0+\psi_1,\quad \frac{\partial}{\partial y}v=\varphi_0-\varphi_1,\quad v(x_0,y_0)=\mathcal{J}(a_{00})\end{aligned}\right\}$$

ヲ満足スル $u(x,y)$, $v(x,y)$ ガ（一意的）ニ存在スル。

ヨッテ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ トスレバ之レガ求ムル Polygenic function デアル、カヽル $f(z)$ ガ唯一ツ存在シ得ナイコトハヨク知ラレタトコロデアル。

次ニ $n=p-1$ 迄成立シタトシ $n=p$ ノトキ矢張リ成立スルコトヲ証明シヤウ。

必要ナルコト

$$D^{p-1}f(z)=\gamma_{p-1}(h_0,h_1,\cdots\cdots,h_{p-1})$$

トスレバ

$$(p-1+r)\,\mathfrak{D}(h_r)=(r+1)\,\bar{\mathfrak{D}}(h_{r+1})\quad(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)\cdots(2)$$

ガ成立スル。

更ニ

$$D^pf(z)=D\gamma_{p-1}(h_0,h_1,\cdots\cdots,h_{p-1})=\gamma_p(g_0,g_1,\cdots\cdots,g_p)$$

之レヨリ

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\mathfrak{D}}(h_0)=g_0\\&\bar{\mathfrak{D}}(h_{r+1})+\mathfrak{D}(h_r)=g_{r+1}\quad(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)\\&\mathfrak{D}(h_{p-1})=g_p\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ル。(2) 及 (3) ヨリ直チニ

$$(p-r)\,\mathfrak{D}(g_r)=(r+1)\,\overline{\mathfrak{D}}(g_{r+1})\quad(r=0,1,\cdots\cdots,p-1)\cdots\cdots(4)$$

ガ成立スル。

充分ナルコト

(4)ガ成立スルカラ

$$Dh_r(z)=\gamma\left\{\frac{p-r}{p}g_r,\ \frac{r+1}{p}g_{r+1}\right\}$$

$$h_r(z_0)=a_{p-1,r}\qquad(r=0,1,\cdots\cdots,p-1)$$

ヲ満足スル polygenic function $h_r(z)$ ガ(一意的ニ)定ル。

コノ $h_r(z)$ ニ対シテハ

$$\mathfrak{D}(h_r)=\frac{r+1}{p}g_{r+1}$$

$$\overline{\mathfrak{D}}(h_{r+1})=\frac{p-1-r}{p}g_{r+1}$$

トナルカラ

$$(p-1-r)\,\mathfrak{D}(h_r)=(r+1)\,\overline{\mathfrak{D}}(h_{r+1})$$

$$(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)$$

ガ成立スル。ヨッテ

$$D^{p-1}f(z)=\gamma_{p-1}(h_0,h_1,\cdots\cdots,h_{p-1})$$

$$D^r f(z_0)=\gamma_r(a_{r0},a_{r1},\cdots\cdots,a_{rr})$$

$$(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)$$

ヲ満足スル Polygenic function $f(z)$ ガ(一意的ニ)定ル。

之レガ求ムル函数デアル。カヽル函数 $f(z)$ ノ一意性モ亦明カデアル。(証了)

尚又、定理ノ條件ハ次ノヤウニ書キ換ヘルコトガ出來ル。[4]

$\Gamma=\gamma(h_0, h_1)$ ヲ與ヘタトキノ任意ノ點 z ニ関シテ、z ノ近傍ト (h_0+h_1) ノ近傍トノ間ニ次ノ如キ對應 T —— コレヲ associated affinity トヨブ —— ヲ考ヘル。

$$\left.\begin{array}{l}\Delta h_0(z)=h_0(z+\Delta z)-h_0(z)\\ \overline{\Delta} h_1(z)=h_1(z+\overline{\Delta z})-h_1(z)\end{array}\right\} \text{トシ}$$

$$T(z+\Delta z)=h_0(z)+h_1(z)+\Delta h_0(z)-\overline{\Delta} h_1(z)$$

トスルトキ

定理ノ條件ハ次ノ條件ト同値デアル。

"$\gamma_n(g_0, g_1, \cdots\cdots, g_n)=\sigma_n(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots\cdots, \Gamma_n)$

トスルトキ Γ_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ノ associated affinity T_i ガ direct similarity (conformal) デアル。"

以上デ $D^n f$ ガソノ fundament(-circular) function ノ affine-similitude デ characterize サレルコトガ解ル。(了)